МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

Вища математика

Криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування

Розрахункова робота

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського
як навчальний посібник для здобувачів ступеня бакалавра спеціальностей
141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та
144 «Теплоенергетика»*

Київ
КПІ ім. Ігоря Сікорського
2020

Вища математика: Криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування: Розрахункова робота [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальностей 141 «Електроенергетика, електротехніка та електромеханіка» та 144 «Теплоенергетика» /КПІ ім. Ігоря Сікорського ; уклад.: В.Ф. Зражевська, Г.М. Зражевський. – Електронні текстові данні (1 файл: 1.55 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 43 с.

Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 7 від 27.02.2020 р.) за поданням Вченої ради Інституту енергозбереження та енергоменеджменту (протокол № 10 від 27.01.2020 р.)

Електронне мережне навчальне видання

Вища математика

Криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування

Розрахункова робота

Укладачі: *Зражевська Віра Федорівна, канд. фіз.-мат. наук, доц.*
Зражевський Григорій Михайлович, канд. фіз.-мат. наук, доц.

Відповідальний редактор *Дудкін.М.Є., докт. фіз.-мат. наук, проф.*

Рецензент: *Моклячук М.П., докт. фіз.-мат. наук,. професор кафедри теорії ймовірностей, математичної статистики та актуарної математики КНУ ім. Тараса Шевченка*

Навчальний посібник розрахований на студентів енергетичних спеціальностей вищих технічних навчальних закладів і містить варіанти розрахункової роботи з вищої математики на тему "Криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування". На допомогу виконання індивідуальних завдань у посібнику наведено основні теоретичні відомості на зазначену тему та приклади розв'язання типових задач.

Посібник може бути корисним студентам очної і заочної форм навчання для організації самостійної роботи при вивченні курсу "Вища математика".

Зміст

Вступ

Активна самостійна робота студентів є необхідною складовою успішного вивчення курсу вищої математики. Даний навчальний посібник містить матеріали на тему "Криволінійні, поверхневі інтеграли та їх застосування" і має на меті допомогти студентам якісно засвоїти тему і сформувати необхідні вміння та навички по застосуванню здобутих знань. У роботі наведено основні теоретичні відомості, розібрано приклади типових задач по вказаній темі.

Методичні вказівки містять 25 варіантів розрахункової роботи, які можуть бути використані викладачами для організації позааудиторної роботи студентів. Запропоновані задачі можуть також бути корисними при складанні індивідуальних завдань для студентів заочної форми навчання.

1. Криволінійний інтеграл I роду, його обчислення та застосування

1.1. Означення криволінійного інтеграла I роду. Розглядаємо на площині Oxy неперервну криву AB. Вважаємо, що в кожній точці дуги кривої M визначена неперервна функція $f(M)$. Розбиваємо криву AB точками $A = A_0, A_1, A_2, ..., A_n = B$ на n довільних дуг $A_{i-1}A_i$ з довжинами $\Delta l_i, (i = \overline{1,\text{n}})$. На кожній дузі $A_{i-1}A_i$ обираємо довільну точку $M_i \in A_{i-1}A_i$.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta l_i$, що не залежить від способу розбиття кривої на дуги $A_{i-1}A_i$, ні від вибору точок M_i, то ця границя називається **криволінійним інтегралом I роду** від функції $f(M)$ по кривій AB і позначається : $\int\limits_{AB} f(M)\,dl.$

Оскільки точки кривої AB визначаються своїми координатами (x, y), функцію $f(M)$, задану на кривій AB, будемо записувати у вигляді $f(x, y)$, розуміючи, що x і y тут зв'язані умовою - точка (x, y) лежить на кривій AB. Отже, за означенням маємо: $\int\limits_{AB} f(x, y)\,dl = \lim\limits_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta l_i$, де (x_i, y_i) - координати точок M_i.

Можна строго довести, що якщо функція $f(x, y)$ неперервна в кожній точці гладкої кривої, то криволінійний інтеграл I роду існує і його величина не залежить ні від способу розбиття кривої на дуги, ні від вибору точок на них ([1,4,5]).

Вкажемо деякі властивості криволінійного інтеграла I роду ([1,2,3]).

Властивість 1. Криволінійний інтеграл I роду не залежить від напрямку кривої інтегрування: $\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{BA} f(x,y)\,dl.$

Властивість 2. $\int\limits_{AB} (c_1 f_1(x,y) + ... + c_n f_n(x,y))dl = c_1 \int\limits_{AB} f_1(x,y)\,dl + ... + c_n \int\limits_{AB} f_n(x,y)dl$,

де $c_i = const$, $i = \overline{1,n}$.

Властивість 3. $\int\limits_{L} f(x,y)\,dl = \int\limits_{L_1} f(x,y)\,dl + \int\limits_{L_2} f(x,y)\,dl$, де $L_1 \cup L_2 = L$, причому криві L_1 і L_2 мають тільки одну спільну точку.

Аналогічно розглянутому плоскому випадку, вводиться криволінійний інтеграл I роду від функції $f(x,y,z)$ по просторовій кривій L: $\int\limits_{L} f(x,y,z)\,dl$ ([1,2,3]).

1.2. Обчислення криволінійного інтеграла I роду. В залежності від способу завдання кривої, отримуємо формули, що зводять криволінійний інтеграл I роду до визначеного [1,3].

1. Параметричне завдання кривої. Нехай плоска крива AB задана параметричним рівнянням : $x = x(t), y = y(t),\quad t \in [t_0, t_1]$. Вважаємо, що функції $x(t)$ і $y(t)$ неперервно диференційовні по t і значення параметру $t = t_0$ відповідає точці A, а $t = t_1$ - точці B. Тоді :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\,dt. \qquad (1)$$

Аналогічна формула за аналогічних умов має місце для криволінійного інтеграла від $f(x,y,z)$ по просторовій кривій AB, що задається параметричним рівнянням: $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in [t_0, t_1]$:

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')}dt. \qquad (2)$$

2. Явне завдання кривої. Нехай плоска крива AB задана рівнянням $y=y(x),\quad x\in[a,b]$. Вважаємо $y(x)$ неперервно диференційовною для $x\in[a,b]$. Тоді :

$$\int\limits_{AB} f(x,y)\,dl=\int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx. \tag{3}$$

Приклад:Обчислити криволінійні інтеграли І роду :

а) $\int\limits_{AB}\sqrt{y}\,dl$, де AB- дуга параболи $y=2x^2$, що відсікається параболою $x=2y^2$,

б) $\int\limits_{AB}(x+2yz)\,dl$, де AB- відрізок прямої від $A(1;2;3)$ до $B(3;-2;5)$;

в) $\int\limits_{L}x^2z\,dl$, де L- крива, задана як перетин параболоїда $2-z=x^2+y^2$ і площини $z=1$.

Розв'язання. а) Крива AB зображена на Рис.1 жирним шрифтом. Щоб знайти межі інтегрування, знаходимо точки перетину двох парабол: $\begin{cases} y=2x^2 \\ x=2y^2 \end{cases} \Rightarrow x=2\left(2x^2\right)^2 \Rightarrow$

$x=8x^4 \Rightarrow x_1=0;\ x_2=\dfrac{1}{2}.$

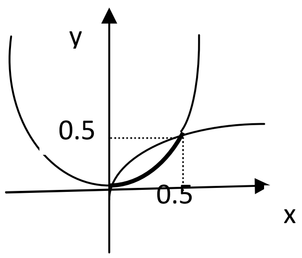

Рис.1

Користуємося формулою (3) , де $x\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right],\ y=2x^2$

$$\int\limits_L\sqrt{y}\,dl=\int\limits_0^{\frac12}\sqrt{2x^2}\cdot\sqrt{1+\left(2x^2\right)'^2}\,dx=\int\limits_0^{\frac12}\sqrt{2}\cdot x\cdot\sqrt{1+16x^2}\,dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\limits_0^{\frac12}\left(1+16x^2\right)^{\frac12}dx^2=\frac{\sqrt{2}\cdot 2}{2\cdot 16}\cdot\frac{\left(1+16x^2\right)^{\frac32}}{3}\Bigg|_0^{\frac12}=\frac{\sqrt{2}}{48}\left(5\sqrt{5}-1\right).$$

б) Складаємо параметричне рівняння прямої AB: $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{-2-2}=\frac{z-3}{5-3}\Rightarrow$ $x=2t+1$; $y=-4t+2$; $z=2t+3$.. Точці A відповідає значення параметра $t=0$, а $t=1$ відповідає точці B. Знаходимо похідні: $x_t'=2$; $y_t'=-4$; $z_t'=2$. За формулою (2) :

$$\int_L (x+2yz)\,dl=\int_0^1\left(2t+1+2(-4t+2)(2t+3)\right)\sqrt{2^2+(-4)^2+2^2}\,dt=$$

$$=\sqrt{24}\int_0^1\left(-16t^2-14t+13\right)dt=\sqrt{24}\left(-16\frac{t^3}{3}-14\frac{t^2}{2}+13t\right)\Bigg|_0^1==\frac{4\sqrt{6}}{3}.$$

в) Крива інтегрування L зображена на Рис.2.

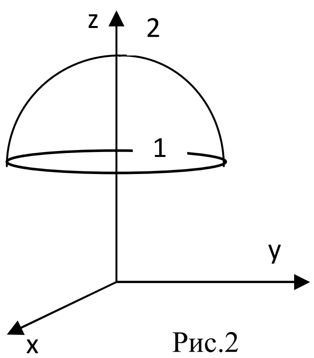

Рис.2

Це коло, що розташоване в площині $z=1$. Знаходимо його радіус $\begin{cases}2-z=x^2+y^2\\ z=1\end{cases}\Rightarrow$ $2-1=x^2+y^2\Rightarrow x^2+y^2=1.$ Параметризуємо L: $x=\cos t,\ y=\sin t, z=1,\ t\in[0;2\pi].$ Тоді $x_t'=-\sin t$; $y_t'=\cos t$; $z_t'=0$. За формулою (2) маємо :

$$\int_L x^2 z\,dl=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+0^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=\pi.$$

1.3. Деякі застосування криволінійного інтеграла І роду. Зупинимось на наступних застосуваннях криволінійного інтеграла І роду**.**

1. Довжина дуги кривої. Нехай AB - плоска чи просторова крива. Тоді її довжина l знаходиться за формулою ([1,2,3]):

$$l=\int_{AB} dl. \qquad (4)$$

Приклад. Знайти довжину дуги кривої, що задана параметричним рівнянням: $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t \quad (0 \le t \le 2\pi)$.

Розв'язання. Знаходимо $x_t' = \cos t - t\sin t\,; y_t' = \sin t + t\cos t\,; z_t' = 1$, і користуємось формулами (3) і (2) :

$$l = \int\limits_{AB} dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cos t)^2 + 1}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\sin t\cos t + t^2\cos^2 t + 1}\, dt =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt = \left(\frac{t}{2}\sqrt{2 + t^2} + \ln\left|t + \sqrt{2 + t^2}\right|\right)\Bigg|_0^{2\pi} = \pi \cdot \sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln(2\pi + \sqrt{2 + 4\pi^2}) - \ln\sqrt{2} =$$

$$= \pi\sqrt{2 + 4\pi^2} + \ln\frac{2\pi + \sqrt{2 + 4\pi^2}}{\sqrt{2}} \text{ (од.).}$$

2. Маса дуги кривої. Розглядаємо матеріальну криву AB, тобто неперервну криву, вздовж якої розподілена деяка маса. Нехай $\gamma(x, y)$ - густина кривої в точці $M(x.y)$. Тоді маса дуги знаходиться за формулою ([1,2,3]):

$$m = \int\limits_{AB} \gamma(x, y) dl. \tag{5}$$

Приклад. Знайти масу дуги AB кривої $y = \ln x$, якщо в кожній її точці лінійна густина пропорційна квадрату абсциси точки. Координати точок: $A(1,0)$, $B(e,1)$.

Розв'язання. З умови випливає: $\gamma(x, y) = x^2$, за формулами (5) , (3) маємо

$$m = \int\limits_{AB} x^2 dl = \int\limits_1^e x^2 \sqrt{1 + (\ln x)'}\, dx = \int\limits_1^e x^2 \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} dx = \frac{1}{2}\int\limits_1^e (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} d(x^2 + 1) =$$

$$= \frac{1}{2} 2 \frac{(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_1^e = \frac{(e^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{\sqrt{(e^2 + 1)} - \sqrt{8}}{3} \text{ (од. маси).}$$

2. Криволінійний інтеграл II роду, його обчислення та застосування.

2.1. Означення криволінійного інтеграла II роду. Розглянемо неперервну криву AB і функцію $P(x;y)$, що визначена в кожній точці кривої. Розбиваємо криву в напрямку від точки A в точку B точками $A_i(x_i;y_i),\ i=\overline{1,n}$, так, що $A_0=A,\dots,\ A_n=B$ на дуги $A_{i-1}A_i$ з довжинами $\Delta l_i, i=\overline{1,n}$. Вибираємо на кожній дузі $A_{i-1}A_i$ довільним чином точку $M_i\in A_{i-1}A_i$. Позначимо через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ проєкцію дуги $A_{i-1}A_i$ на вісь Ox.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\max\Delta l_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i$, яка не залежить ні від способу розбиття кривої AB на дуги, ні від вибору точок M_i, то ця границя називається криволінійним інтегралом по координаті x або криволінійним інтегралом II роду: $\int_{AB}P(M)dx=\lim\limits_{\max\Delta l_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}P(M_i)\Delta x_i.$ Аналогічно вводиться криволінійний інтеграл по координаті y: $\int_{AB}Q(M)dy=\lim\limits_{\max\Delta l_i\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}Q(M_i)\Delta y_i$, де $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$ проєкція дуги $A_{i-1}A_i$ на вісь Oy.

Криволінійний інтеграл II роду загального виду $\int_{AB}P(M)dx+Q(M)dy$ визначається рівністю: $\int_{AB}P(M)dx+Q(M)dy=\int_{AB}P(M)dx+\int_{AB}Q(M)dy$.

Оскільки точки кривої AB визначаються своїми координатами (x,y), функції $P(M)$ і $Q(M)$ на кривій AB часто записують у вигляді $P(x,y),\ Q(x,y)$.

Можна строго довести наступний факт: якщо крива AB гладка, а функції $P(x,y),\ Q(x,y)$ неперервні на кривій, то криволінійний інтеграл $\int_{AB}P(x,y)dx+Q(x.y)dy$ існує.

Вкажемо деякі властивості криволінійного інтеграла II роду.

Властивість 1. При зміні напрямку прямої інтегрування криволінійний інтеграл II роду змінює свій знак на протилежний, тобто:

$$\int_{AB} P(M)dx + Q(M)dy = -\int_{BA} P(M)dx + Q(M)dy.$$

Властивість 2 . Якщо крива AB розбита точкою С на дві частини АС і СВ, то :

$$\int_{AB} P(M)dx + Q(M)dy = \int_{AC} P(M)dx + Q(M)dy + \int_{CB} P(M)dx + Q(M)dy.$$

Властивість 3. Криволінійний інтеграл по замкненій кривій не залежить від вибору початкової точки інтегрування, а лише від напрямку обходу кривої.

Аналогічно плоскому випадку вводиться криволінійний інтеграл II роду по просторовій кривій: $\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$, який має аналогічні властивості ([1,2,3]).

2.2. Обчислення криволінійного інтеграла II роду. Обчислення криволінійного інтеграла II роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

1. Параметричне завдання кривої. Нехай плоска крива АВ задана параметричним рівнянням: $x = x(t), y = y(t), t \in [t_0, t_1]$, причому значення параметра $t = t_0$ відповідає точці А, а $t = t_1$ - точці В. Вважаємо функції $x(t)$ i $y(t)$ неперервними разом із своїми похідними $x'(t)$ i $y'(t)$ на відрізку $[t_0, t_1]$. Тоді має місце формула ([1,2,3]):

$$\int_{AB} P(x;y)dx + Q(x;y) = \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t))dt. \tag{6}$$

Аналогічна формула за аналогічних умов має місце для криволінійного інтеграла II роду в просторі:

$$\int_{AB} P(x;y;z)\,dx + Q(x;y;z)\,dy + R(x;y;z)\,dz =$$
$$= \int_{t_0}^{t_1} (P(x(t),y(t),z(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t),z(t))\,y'(t) + R(x(t),y(t),z(t))\,z'(t))dt \quad , \quad (7)$$

де крива AB задана параметричним рівнянням : $x = x(t), y = y(t), z = z(t),\ t \in [t_0, t_1]$.

2. Явне завдання кривої. Нехай плоска крива AB задана рівнянням $y = y(x),\ x \in [a,b]$, де функції $y(x), y'(x)$ неперервні на відрізку $[a,b]$. Тоді ([1,2,3]):

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)dy = \int_a^b (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))\,y'(x))dx. \quad (8)$$

Якщо крива AB задана рівнянням $x = x(y)$, $y \in [c;d]$,то за аналогічних умов має місце формула ([1,2,3]):

$$\int_{AB} P(x;y)\,dx + Q(x;y)dy = \int_c^d (P(x(y), y)\,x'(y) + Q(x(y), y))dy. \quad (9)$$

Приклад. Обчислити криволінійні інтеграли II роду:

а) $\int_L (x + y^2)\,dx + 2xydy$, де L - контур трикутника ABC, $A(0;0)$; $B(1;0)$; $C(1;1)$, (напрямок руху - проти годинникової стрілки).

б) $\int_L xydx + y^2dy$, де L - дуга еліпса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ від точки $A(a;0)$ до точки $B(0;b)$ (напрямок руху - проти годинникової стрілки).

в) $\int_L ydx + x^2dy + (z^2 + 1)dz$, де L - виток гвинтової лінії $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt,\ \ t \in [0; 2\pi]$, що проходиться в напрямі зростання параметра t.

Розв'язання. а) Контур інтегрування складається з трьох відрізків: AB, BC, CA. (Рис.3). Напрям обходу вказано стрілкою. Користуючись властивістю 2, шукаємо інтеграл на кожному відрізку .

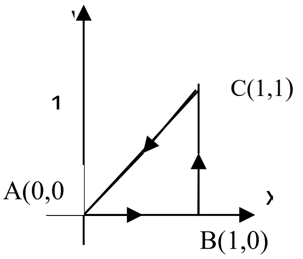

Рис.3

1) AB: $y = 0,\ x \in [0,1]$, за (8) маємо :

$$\int\limits_{AB} \left(x + y^2\right) dx + 2xydy = \int\limits_0^1 \left(x + 0 + 2x \cdot 0 \cdot 0\right) dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

2) BC: $x = 1,\ y \in [0,1]$. За (9):

$$\int\limits_{BC} \left(x + y^2\right) dx + 2xydy = \int\limits_0^1 ((1 + y^2) \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot y))dy = \left. y^2 \right|_0^1 = 1 \ ;$$

3) CA : $y = x,\ x \in [1,0]$. За (8) :

$$\int\limits_{CA} \left(x + y^2\right) dx + 2xydy = \int\limits_1^0 (x + x^2 + 2x \cdot x \cdot 1)dx = \left.\left(\frac{x^2}{2} + \frac{3x^3}{3}\right)\right|_1^0 = -\frac{3}{2}.$$

Остаточно: $\int\limits_L \left(x + y^2\right)dx + 2xydy = \frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} = 0$.

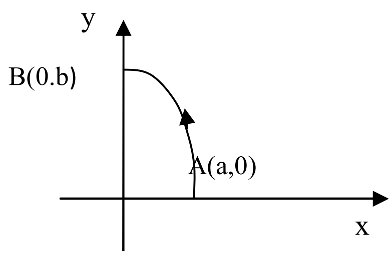

Рис.4

б) Складаємо параметричне рівняння дуги еліпса (Рис.4): $x = a\cos t,\ \mathrm{y} = b\,\mathrm{sint}$. Точка A відповідає значенню параметра t=0, точка B $t = \frac{\pi}{2}$. Отже, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Знаходимо $x_t' = -a\sin t$; $y_t' = b\cos t$ і користуємось формулою (6).

$$\int\limits_L xydx + y^2dy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (a\cos t\ b\sin t(-a\sin t) + b^2 \sin^2 t\, b\cos t)dt =$$

$$= -a^2 b \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 td\sin t + b^3 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, d\sin t = -a^2 b \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} + b^3 \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{a^2 b}{3} + \frac{b^3}{3} = \frac{b(b^2 - a^2)}{3}.$$

в) Знаходимо $x_t' = -a\sin t;\ y_t' = a\cos t;\ z_t' = b$ і користуємося формулою (7):

$$\int\limits_L ydx + x^2dy + (z^2 + 1)dz = \int\limits_0^{2\pi} (a\sin t(-a\sin t) + a^2 \cos^2 t\,(a\cos t) + (b^2t^2 + 1)b)dt =$$

$$= -a^2\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt + a^3\int_0^{2\pi}(1-\sin^2 t)d\sin t + b^3\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^{2\pi} + bt\Big|_0^{2\pi} = -\frac{a^2}{2}\left(t\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{2\pi}\right) +$$

$$+a^3\left(\sin t\Big|_0^{2\pi} - \left.\frac{\sin^3 t}{3}\right|_0^{2\pi}\right) + \frac{b^3}{3}8\pi^3 + 2\pi b = -\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^3 + 2\pi b.$$

2.3 Формула Гріна. Нехай на площині Oxy задана правильна область D, L – границя області D. Вважаємо, що в області D задані функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, які є неперервними разом зі своїми частинними похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$ і $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тоді має місце формула Гріна ([1,2,3]):

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy\,, \qquad (10)$$

де інтегрування по замкненій кривій L в криволінійному інтегралі здійснюється в додатному напрямі (тобто проти годинникової стрілки).

Зауваження. Якщо окремо не вказано, то по замкненій кривій береться по замовченню інтегрування проти годинникової стрілки.

Приклад. Користуючись формулою Гріна, обчислити криволінійні інтеграли II роду по замкненім контурам (обхід контуру проти годинникової стрілки):

а) $\int_L \left(x+y^2\right)dx + 2xydy$, де L – контур трикутника ABC; A(0;0), B(1;0), C (1;1);

б) $\int_L \left(x+y^3\right)dx - x^3dy$, де L : $x^2+y^2=4x$.

Розв'язання. а) Контур інтегрування зображений на Рис.3. Застосовуючи формулу Гріна, маємо: $P(x,y)=x+y^2$; $\frac{\partial P}{\partial y}=2y$; $Q(x,y)=2xy$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y$;

$\int_L (x+y^2)dx + 2xydy = \iint_D (2y-2y)dxdy = 0$.

б) Крива L та область D, яку вона обмежує, представлена на Рис.5.

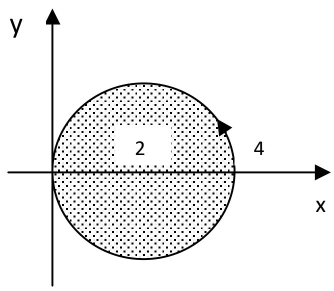

Рис.5

Застосовуючи формулу Гріна, маємо:

$$P(x;y)=x+y^3;\frac{\partial P}{\partial y}=3y^2;\ Q(x;y)=-x^3;\frac{\partial P}{\partial x}=-3x^2;$$

$$\int_L (x+y^3)dx-x^3dx=\iint_D(-3x^2-3y^2)dxdy=-3\iint_D(x^2+y^2)dxdy.$$

Оскільки область D круг, переходимо в подвійному інтегралі до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$. Рівняння L в полярній системі координат: $\rho^2=4\rho\cos\varphi\Rightarrow\rho=4\cos\varphi$.

Отже, $$-3\iint_D(x^2+y^2)dxdy=-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{4\cos\varphi}\rho^2\rho d\rho=-3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{4\cos\varphi}d\varphi=-\frac{3\cdot4^4}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\varphi d\varphi=$$

$$=-192\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1+\cos2\varphi}{2}\right)^2d\varphi==-48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+2\cos2\varphi+\cos^2 2\varphi)d\varphi=-48(\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\sin2\varphi\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+$$

$$+\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos4\varphi}{2}d\varphi)=-48\left(\pi+\frac{1}{2}\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{8}\sin4\varphi\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right)=-48(\pi+\frac{\pi}{2})=-72\pi.$$

2.4. Криволінійні інтеграли II роду, що не залежать від кривої інтегрування.

Теорема. Нехай область D однозв'язна (тобто така, що довільна замкнена лінія, що належить цій області, обмежує область, що цілком лежить в D), замкнена, обмежена кривою L. Вважаємо, що функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ в області D визначені і неперервні разом зі своїми частинними похідними. Тоді сформульовані нижче чотири умови рівносильні між собою (тобто з виконання однієї умови випливає виконання трьох інших):

1) в області D виконується рівність

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x};\qquad(11)$$

2) $\int\limits_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$, де C – будь-який замкнений контур, що лежить в D;

3) $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ не залежить від виду кривої інтегрування AB , а лише від початкової і кінцевої точок;

4) вираз $P(x.y)dx + Q(x.y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$, що визначена в D.

Доведення теореми дивись, наприклад, в [1,3]. Якщо інтеграл не залежить від кривої інтегрування, його часто позначають як $\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)} P(x.y)dx + Q(x,y)dy$, вказуючи лише початкову (x_0,y_0) та кінцеву (x_1,y_1) точки інтегрування.

Приклад. Знайти $\int\limits_L (2x+3x^2+3y^2)e^{3x}dx + 2ye^{3x}dy$, де L - коло: $x^2+y^2=4y$.

Розв'язання. В даному прикладі $P(x,y)=(2x+3x^2+3y^2)e^{3x}$; $Q(x,y)=2ye^{3x}$. Тоді: $\frac{\partial P}{\partial y}=6ye^{3x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=2y3e^{3x}$ $=6ye^{3x}$. Оскільки $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ і контур замкнений, то $\int\limits_L (2x+3x^2+3y^2)e^{3x}dx + 2ye^{3x}dy$=0.

Приклад. Довести, що інтеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} (2x+\sin 2y)dx + 2x\cos 2y dy.$ не залежить від кривої інтегрування та знайти його значення.

Розв'язання. Покажемо, що інтеграл не залежить від виду кривої, що з'єднує точки (0,0) і (1,2). Для цього перевіримо, що $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$: $P=2x+\sin 2y$; $\frac{\partial P}{\partial y}=2\cos 2y$; $Q=2x\cos 2y$; $\frac{\partial Q}{\partial x}=2\cos 2y$. Умова виконується, отже криву інтегрування можемо вибрати самостійно. Побудуємо ламану OAB (Рис.6), де O(0,0), A(1,0), B(1,2).

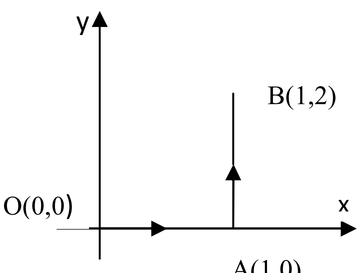

Рис.6

Користуємося властивістю 2 криволінійних інтегралів II роду.

OA: $y=0,\ x\in[0,1]$,. За формулою (27): $\int\limits_0^1 (2x+\sin 0+2x\cos 0\cdot 0)dx = x^2\Big|_0^1 = 1$.

AB: $x=1,\ y\in[0,2]$,За формулою (28): $\int\limits_0^2 ((2+\sin 2y)\cdot 0+2\cos 2y)dy = \sin 2y\Big|_0^2 = \sin 4$.

Тоді $\int\limits_{(0,0)}^{(1,2)} (2x+\sin 2y)dx + 2x\cos 2y dy = 1+\sin 4.$

2.5. Відновлення функції двох змінних по її повному диференціалу. Сформульована теорема дозволяє відновити з точністю до сталої функцію двох змінних $u(x,y)$ по відомому її повному диференціалу. А саме, якщо для виразу $P(x.y)dx+Q(x.y)dy$ виконується умова (30), то на підставі теореми існує функція $u(x,y)$ що $du=P(x.y)dx+Q(x.y)dy$ і функцію $u(x,y)$ можна знайти за формулою ([1,3]):

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(\xi,y_0)d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,\eta)d\eta + C \qquad (12)$$

Виведення формули (12) приведено, наприклад, в [2]. В якості точки (x_0,y_0) вибирається довільна точка з області визначення функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, найчастіше (0,0).

Приклад. Перевірити, що вираз $\cos(x+2y)dx+(2\cos(x+2y)+3e^{3y})dy$ є повним диференціалом деякої функції $u(x,y)$ і знайти її.

Розв'язання. Перевіряємо виконання умови (30) у нашому прикладі: $P(x,y)=\cos(x+2y)$, $Q(x,y)=2\cos(x+2y)+3e^{3y}$. Тоді $\frac{\partial P}{\partial y}=-2\sin(x+2y)$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2\sin(x+2y)$. Отже, умова виконується. Функцію $u(x,y)$ шукаємо за формулою (12), вибираючи $x_0=0, y_0=0.$

$$u(x,y)=\int_0^x \cos(\xi+2\cdot 0)d\xi+\int_0^y (2\cos(x+2\eta)+3e^{3\eta})d\eta+C=\sin\xi\Big|_0^x+2\frac{1}{2}\sin(x+2\eta)\Big|_0^y+$$

$$+3\frac{1}{3}e^{3\eta}\Big|_0^y+C==\sin x+\sin(x+2y)-\sin x+e^{3y}-1+C=\sin(x+2y)+e^{3y}+C.$$

2.6. Деякі застосування криволінійного інтеграла II роду.

1. Площа плоскої фігури. Нехай плоска область D обмежена замкненою лінією L. Тоді її площу можна обчислити за формулою [1, 2, 3]:

$$S=\frac{1}{2}\int_L xdy-ydx. \qquad (13)$$

Інтегрування здійснюється проти годинникової стрілки.

Приклад. Знайти площу фігури, що обмежена кардіоїдою: $x=2a\cos t-a\cos 2t,\ y=2a\sin t-a\sin 2t.$

Розв’язання. Зображуємо область на Рис. 7. При обході контуру проти годинникової стрілки параметр t змінюється від 0 до 2π. Застосуємо формули (13) і (6): $x_t'=-2a\sin t+2a\sin 2t$; $y_t'=2a\cos t-2a\cos 2t$,

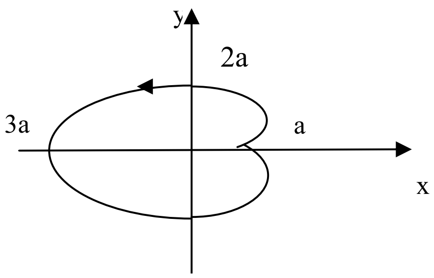

Рис.7

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\big[(2a\cos t-a\cos 2t)(2a\cos t-2a\cos 2t)-(2a\sin t-a\sin 2t)(-2a\sin t+2a\sin 2t)\big]dt=$$

$$=\frac{1}{2}a^2\int_0^{2\pi}\big(6-6(\cos t\cos 2t+\sin t\sin 2t\big)dt=3a^2\int_0^{2\pi}\big(1-\cos(2t-t)\big)dt=$$

$$=3a^2\left(t\Big|_0^{2\pi}+\sin t\Big|_0^{2\pi}\right)=6\pi a^2 \text{ (кв.од).}$$

2. Робота змінної сили. Нехай матеріальна точка (x,y) під дією змінної сили $\overline{F}=\{P(x,y),Q(x,y)\}$ переміщується в площині Oxy по деякій кривій від точки M до точки N. Тоді робота, яку при цьому здійснює сила, знаходиться за формулою ([1,3]):

$$A=\int_{MN} P(x,y)dx+Q(x,y)dy. \qquad (14)$$

Приклад. Знайти роботу сили $\overline{F}=\left\{x+y\sqrt{x^2+y^2};\, y-\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2+y^2=16\ \left(x\geq 0, y\geq 0\right)$ від точки $M\left(4;0\right)$ до точки $N\left(0,4\right)$.

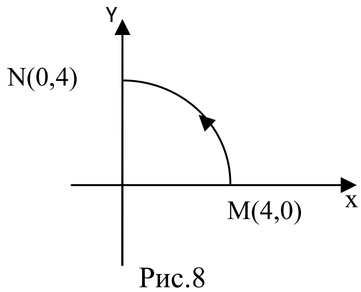

Рис.8

Розв'язання. За формулою (14): $A=\int\limits_{MN}\left(x+y\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(y-\sqrt{x^2+y^2}\right)dy$.

Записуємо рівняння кривої інтегрування (Рис. 8) в параметричному вигляді: $x=4\cos t, y=4\sin t,$ точці M відповідає значення параметра $t=0,$ точці N - $t=\dfrac{\pi}{2}$. Тоді, використовуючи формулу (25), знаходимо роботу сили: $x'_t=-4\sin t;\ y'_t=4\cos t;$

$$\mathrm{A}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\left(4\cos t+4\sin t\sqrt{16\cos^2 t+16\sin^2 t}\right)\left(-4\sin t\right)+\left(4\sin t-\sqrt{16\cos^2 t+16\sin^2 t}\right)4\cos t\right]dt=$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(-16\cos t\sin t-64\sin^2 t+16\cos t\sin t-16\cos t\right)dt=-64\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}dt-16\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=-32\left(t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)-16=-32\left(\frac{\pi}{2}\right)-16=-16\left(\pi+1\right).$$

3. Поверхневий інтеграл, його обчислення та застосування

3.1. Означення та властивості поверхневого інтеграла I роду. Нехай в просторі $Oxyz$ задана поверхня σ. В кожній точці M поверхні визначена неперервна функція $f(M)$. Розбиваємо поверхню σ на n поверхонь σ_i з площами $\Delta S_i \left(i=\overline{1,n}\right)$ і діаметрами d_i. На кожній σ_i довільним чином вибираємо точку M_i.

Означення. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$, яка не залежить ні від способу розбиття поверхні на σ_i, ні від вибору точок M_i, то ця границя називається **поверхневим інтегралом I роду** і позначається: $\iint\limits_{\sigma} f(M)\,d\sigma.$

Отже, за означенням поверхневого інтеграла I роду: $\iint\limits_{\sigma} f(M)\,d\sigma = \lim\limits_{\substack{\max d_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i.$

Оскільки точку M можна задати декартовими координатами (x,y,z), то поверхневий інтеграл I роду часто записують у вигляді $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$, розуміючи, що (x,y,z) - координати точки на поверхні.

Можна довести твердження: якщо поверхня σ гладка, а $f(x,y,z)$ неперервна на цій поверхні, то поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$ існує. ([1,2])

Нижче приведені дві властивості поверхневого інтеграла I роду, що застосовуються для обчислення ([1,2,3]).

<u>Властивість 1.</u> Якщо $f_i(x,y,z)$, $i=\overline{i,n}$ інтегровні на поверхні σ функції і $c_i = const,\ i=\overline{i,n}$, то

$$\iint\limits_{\sigma} \left(c_1 f_1(x,y,z)+\ldots+c_n f_n(x,y,z)\right)d\sigma = c_1\iint\limits_{\sigma} f_1(x,y,z)\,d\sigma+\ldots+c_n\iint\limits_{\sigma} f_n(x,y,z)\,d\sigma.$$

Властивість 2. Якщо $f(x,y,z)$ інтегровна на поверхні σ і $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, причому перетин σ_1 і σ_2 складається лише з границі, що їх розділяє, то $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1} f(x,y,z)\,d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2} f(x,y,z)\,d\sigma.$

3.2. Обчислення поверхневого інтеграла I роду. Розглянемо поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma$. Позначимо через D проєкцію поверхні σ на площину Oxy. Вважаємо, що рівняння поверхні має вигляд σ $: z=z(x,y)$ і функція $z(x,y)$ в усіх точках області D неперервна разом із своїми частинними похідними: $z'_x(x,y), z'_y(x,y)$. Тоді поверхневий інтеграл по поверхні σ зводиться до подвійного інтеграла по проєкції σ на Oxy (область D) за формулою ([1,2,3]):

$$\iint\limits_{\sigma} f(x,y,z)\,d\sigma=\iint\limits_{D} f\left(x,y,z(x,y)\right)\sqrt{1+\left(z'_x(x,y)\right)^2+\left(z'_y(x,y)\right)^2}\,dxdy. \tag{15}$$

Зауважимо, що аналогічні формули за відповідних умов можна отримати при проєктуванні поверхні σ на інші координатні площини.

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint\limits_{\sigma}(z+4y-x)\,d\sigma$, де σ - частина площини $2x+4y+z-4=0$, що розташована в I октанті.

Розв'язання. Область інтегрування зображена на Рис. 9. Щоб скористатися формулою (34) записуємо рівняння площини у вигляді $z=4-2x-4y$, знаходимо $z'_x=-2$; $z'_y=-4$, знаходимо проєкцію D поверхні σ на площину Oxy (Рис. 10).

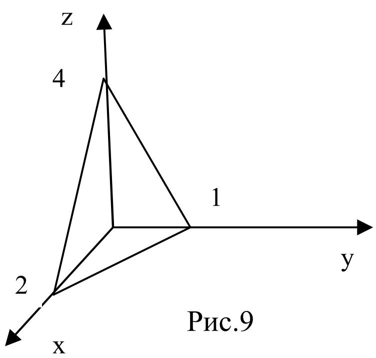

Рис.9

Рівняння прямої $AB: \frac{x}{2}+y=1$. За формулою (15) маємо:

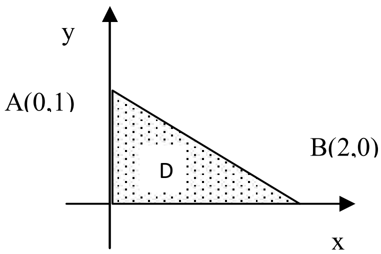

Рис.10

$$\iint_\sigma (z+4y-x)\,d\sigma =$$

$$=\iint_D (4-2x-4y+4y-x)\sqrt{1+(-2)^2+(-4)^2}\,dxdy =$$

$$=\sqrt{21}\iint_D (4-3x)\,dxdy = \sqrt{21}\int_0^2 dx \int_0^{1-\frac{x}{2}} (4-3x)\,dy =$$

$$=\sqrt{21}\int_0^2 (4y-3xy)\Big|_0^{1-\frac{x}{2}} dx =$$

$$=\sqrt{21}\int_0^2 \left(4-5x+\frac{3}{2}x^2\right)dx = \sqrt{21}\left(4x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3\right)\Big|_0^2 = 2\sqrt{21}.$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл I роду $\iint_\sigma xzd\sigma$, де σ - бокова поверхня конуса $z^2 = x^2 + y^2 \; (0 \le z \le 3)$.

Розв'язання. Аналогічно попередньому прикладу, зображуємо область інтегрування σ (Рис. 11). Проєкцією поверхні на площину Oxy буде круг з центром в початку координат і радіуса 3.

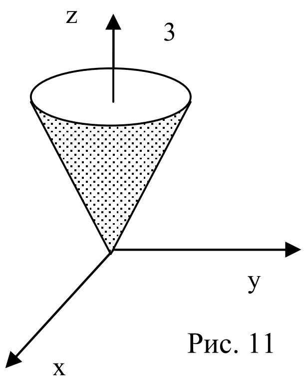

Рис. 11

Рівняння поверхні записуємо у вигляді: $z = \sqrt{x^2+y^2}$ і шукаємо частинні похідні: $z'_x = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z'_y = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Зводимо поверхневий інтеграл до подвійного за формулою (15):

$$\iint_\sigma xzd\sigma = \iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}dxdy = = \sqrt{2}\iint_D x\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy.$$

Для підрахунку подвійного інтеграла по кругу D, переходимо в полярні координати: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$:

$$\sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^3 \rho\cos\varphi\rho\rho d\rho = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\left(\cos\varphi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^3\right)d\varphi = \frac{81\sqrt{2}}{4}\sin\varphi\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

3.3. Деякі застосування поверхневого інтеграла I роду.

1. Площа поверхні. Площа поверхні σ знаходиться за формулою ([1,2,3]):

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma . \qquad (16)$$

Приклад. Знайти площу поверхні частини параболоїда $4-z=x^2+y^2\,(z\geq 3)$.

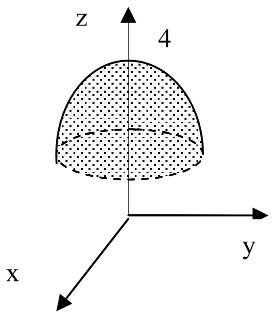

Рис.12

Розв'язання. Користуємося формулами (16) і (15). Поверхня σ, площу якої шукаємо, зображена на Рис.12, її проєкція D на площину Oxy круг радіуса 2 з центом в початку координат.

Рівняння поверхні $z=4-x^2-y^2$, її похідні: $z'_x=-2x$, $z'_y=-2y$. Отже,

$$S=\iint_{\sigma} d\sigma=\iint_{D}\sqrt{1+(-2x)^2+(-2y)^2}\,dxdy=\iint_{D}\sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dxdy.$$

Переходимо до полярної системи координат: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$:

$$\iint_{D}\sqrt{1+4\rho^2}\,\rho d\rho=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^1\rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}\frac{\left(1+4\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_0^{2\pi}\right)d\varphi=\frac{1}{12}\left(5^{\frac{3}{2}}-1\right)\cdot\varphi\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)(\text{кв.од.})$$

2. Маса поверхні. Нехай по поверхні σ розподілена деяка маса з поверхневою щільністю $\gamma(x,y,z)$ і функція $\gamma(x,y,z)$ неперервна на σ. Маса такої поверхні знаходиться за формулою ([1,2,3]):

$$m=\iint_{\sigma}\gamma(x,y,z)\,d\sigma. \qquad (17)$$

Приклад. Знайти масу частини сфери $x^2+y^2+z^2=R^2,(R>0)$, що розташована в I октанті, якщо густина в кожній її точці дорівнює аплікаті цієї точки.

Розв'язання. Користуємося формулами (17) і (15). Поверхня σ зображена на Рис. 13, її проєкція D - на Рис. 14.

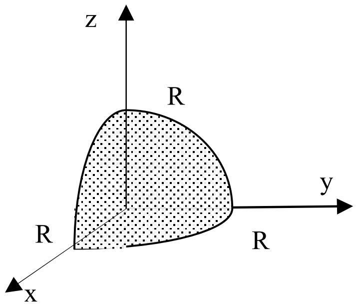

Рис.13

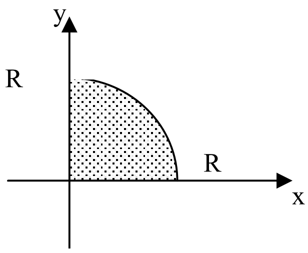

Рис.14

Оскільки $z \geq 0$, то $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z'_x = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$, $z'_y = -\dfrac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$. За умовою $\gamma(x, y, z) = z$. Отже,

$$m = \iint\limits_{\sigma} z d\sigma = \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} dxdy =$$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2} dxdy = R \iint\limits_{D} dxdy = RS_D = \frac{\pi R^3}{4} \text{ (од. маси).}$$

4. Поверхневий інтеграл II роду. Його обчислення та застосування

4.1. Означення та деякі властивості. Розглянемо двосторонню поверхню σ : після обходу такої поверхні, не перетинаючи її границі, напрямок вектора нормалі до неї не змінюється ([1,2,3]). Зазначимо, що двосторонньою поверхнею є довільна гладка поверхня, рівняння якої $z=z(x,y)$ і функції $z(x,y)$, $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ є неперервними в області D площини Oxy. Зробимо поверхню орієнтованою, тобто виберемо сторону поверхні, задаючи в кожній точці поверхні $M(x,y,z)$ одиничний вектор нормалі $\vec{n}(M)=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора, неперервні функції точки поверхні.

Нехай в кожній точці поверхні σ задано неперервну векторну функцію: $\vec{a}(M)=P(M)\vec{i}+Q(M)\vec{j}+R(M)\vec{k}.$ Проєкція $\vec{a}(M)$ на $\vec{n}(M)$ визначається формулою:

$$\left(\vec{a}(M),\vec{n}(M)\right)=P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma. \tag{18}$$

Функція, визначена в (18), є неперервною, а отже існує поверхневий інтеграл I роду від цієї функції по поверхні σ.

Означення. Інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\left(\vec{a}(M),\vec{n}(M)\right)d\sigma$ називається поверхневим інтегралом II роду від вектор-функції $\vec{a}(M)$ по орієнтованій поверхні σ.

Вкажемо деякі властивості поверхневого інтеграла II роду [1,3].

<u>Властивість 1</u>. Поверхневий інтеграл II роду змінює знак при зміні сторони поверхні.

<u>Властивість 2</u>. Поверхневий інтеграл II роду від лінійної комбінації функцій дорівнює лінійній комбінації відповідних інтегралів.

Властивість 3. $\iint\limits_{\sigma}\left(\vec{a}(M),\vec{n}(M)\right)d\sigma=\iint\limits_{\sigma_1}\left(\vec{a}(M),\vec{n}(M)\right)d\sigma+\iint\limits_{\sigma_2}\left(\vec{a}(M),\vec{n}(M)\right)d\sigma,$

де $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, причому перетин σ_1 і σ_2 складаються лише з границі, що їх розділяє.

4.2. Обчислення поверхневого інтеграла II роду. Поверхневий інтеграл II роду за означенням визначається через поверхневий інтеграл I роду. Якщо рівняння поверхні $z=z(x,y)$, то координати вектора нормалі можуть бути знайдені за формулами:

$$\cos\alpha=\mp\frac{z'_x}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}};\cos\beta=\mp\frac{z'_y}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}};\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(z'_x\right)^2+\left(z'_y\right)^2}}. \qquad (19)$$

Якщо вектор нормалі $\vec{n}(M)$ утворює гострий кут з додатним напрямком осі Oz, вибираємо верхній знак в формулах, якщо тупий - нижній.

Можна також вивести формулу, що зводить обчислення поверхневого інтеграла II роду до обчислення подвійних інтегралів ([2,3]). Розглянемо поверхневий інтеграл II роду:

$$\iint\limits_{\sigma}\left(P(M)\cos\alpha+Q(M)\cos\beta+R(M)\cos\gamma\right)d\sigma, \qquad (20)$$

де поверхня σ має рівняння $\phi(x,y,z)=0$. Будемо вважати, що це рівняння може бути однозначно розв'язане відносно змінних і введемо наступні позначення. Якщо рівняння поверхні σ: $x=x(y,z)$, то позначимо через D_1 проєкцію поверхні σ на площину Oyz; якщо рівняння поверхні σ: $y=y(x,z)$, то D_2- проєкція поверхні σ на площину Oxz, якщо рівняння поверхні $\sigma: z=z(x,y)$, то D_3- проєкція поверхні σ на площину Oxy. Тоді має місце формула ([1,2,3]):

$$\iint\limits_{\sigma}\left(\vec{a}(M),\vec{n}(M)\right)d\sigma=\pm\iint\limits_{D_1}P\left(x(y,z),y,z\right)dydz\pm\iint\limits_{D_2}Q\left(x,y(x,z),z\right)dxdz\pm$$

$$\pm\iint\limits_{D_3}R\left(x,y,z(x,y)\right)dxdy \qquad (21)$$

Знаки перед інтегралами вибираємо в залежності від орієнтації поверхні σ. Наприклад, в другому інтегралі вибираємо "+", якщо нормаль до поверхні утворює з Oy гострий кут.

Щоб підкреслити, що поверхневий інтеграл II роду можна обчислити через подвійні інтеграли по областях, що є проєкціями поверхні на координатні площини, інтеграл (39) часто записують у вигляді: $\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy$, отже:

$$\iint\limits_{\sigma} P(x,y,z)\,dydz + Q(x,y,z)\,dxdz + R(x,y,z)\,dxdy =$$

$$= \iint\limits_{\sigma} \big(P(M)\cos\alpha + Q(M)\cos\beta + R(M)\cos\gamma\big)\,d\sigma. \qquad (22)$$

Приклад. Обчислити поверхневий інтеграл II роду: $I = \iint\limits_{\sigma^+} xdydz + ydxdz + zdxdy,$ де σ^+- сторона сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що розташована в I октанті $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$, нормаль до поверхні утворює гострий кут з додатним напрямом осі Oz.

Розв'язання. Область інтегрування зображена на Рис. 13.

I спосіб. Зведемо поверхневий інтеграл II роду до поверхневого інтеграла I роду (за (22)). Для цього шукаємо координати вектора нормалі $\vec{n}(M)$ за формулами (19), вибираючи верхній знак в формулах. Оскільки $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$; то $z'_x = \dfrac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$; $z'_y = \dfrac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$;

$$\sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{R^2 - x^2 - y^2}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Тоді: $\cos\alpha = \dfrac{x}{R}$; $\cos\beta = \dfrac{y}{R}$; $\cos\gamma = \dfrac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R}$. За (22) записуємо поверхневий інтеграл I роду: $\mathrm{I} = \iint\limits_{\sigma} \left(x \cdot \dfrac{x}{R} + y \cdot \dfrac{y}{R} + z\dfrac{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}{R} \right) d\sigma$.

Тепер обчислюємо поверхневий інтеграл I роду за формулою (15). Для цього знаходимо проєкцію поверхні на площину Oxy область D: чверть круга з центром в початку координат радіуса R в I квадранті (Рис. 14), і обчислюємо подвійний інтеграл по цій області в полярній системі координат:

$$I=\frac{1}{R}\iint\limits_{D}\left(x^2+y^2+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\cdot\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy=$$

$$=\frac{R^3}{R}\iint\limits_{D}\frac{dxdy}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}=R^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}}=$$

$$=-\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R}\left(R^2-\rho^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(R^2-\rho^2\right)=-\frac{R^2}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\left(2\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^R\right)=\frac{R^2}{2}\cdot 2R\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi R^3}{2}.$$

II спосіб. За формулою (21) зведемо інтеграл до суми трьох подвійних інтегралів $\mathrm{I}=\mathrm{I}_1+\mathrm{I}_2+\mathrm{I}_3$. Проєкцією поверхні на всі три координатні площини (область D_1 на площину Oyz, область D_2 на площину Oxz і область D_3 на площину Oxy) буде чверть круга з центром в початку координат радіуса R, що розташована в I квадранті. Вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з додатними напрямами координатних осей, отже в правій частині (21) перед інтегралами вибираємо знак “+”.

1. Записуємо рівняння поверхні у вигляді $x=\sqrt{R^2-y^2-z^2}$ і обчислюємо подвійний інтеграл по D_1:

$$I_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt{R^2-y^2-z^2}dydz=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{R}\sqrt{R^2-\rho^2}\rho d\rho=-\frac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R^2-\rho^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R d\varphi=\frac{\pi R^3}{6}.$$

2. Записуємо рівняння σ у вигляді $y=\sqrt{R^2-x^2-z^2}$ і обчислюємо подвійний інтеграл по D_2: $\mathrm{I}_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt{R^2-x^2-z^2}dxdz=\frac{\pi R^3}{6}.$

3. Записуємо рівняння σ у вигляді $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ і і обчислюємо подвійний інтеграл по D_3: $\mathrm{I}_3=\iint\limits_{D_3}\sqrt{R^2-x^2-y^2}dxdy=\frac{\pi R^3}{6}.$

Остаточно: $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 + \mathrm{I}_3 = \dfrac{\pi R^3}{2}$.

4.3. Формула Остроградського - Гауса. Розглядаємо в просторі скінченну область V, що обмежена замкненою поверхнею σ, розглядається зовнішня сторона поверхні. Нехай функції $P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$ неперервні разом зі своїми частинними похідними I порядку в області V. Тоді має місце **формула Остроградського - Гауса** ([4,5]):

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \iint\limits_{\sigma^+} Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \qquad (23)$$

Формула встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом II роду по замкненій поверхні і потрійним інтегралом по області, що обмежена цією поверхнею.

Приклад. Використовуючи формулу Остроградського - Гауса, обчислити поверхневий інтеграл: $I = \iint\limits_{\sigma^+} x^3 dydz + y^3 dxdz + z^3 dxdy,$ де σ^+- зовнішня сторона поверхні, що складається з верхньої півсфери $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ і площини $z = 0$ (Рис. 15).

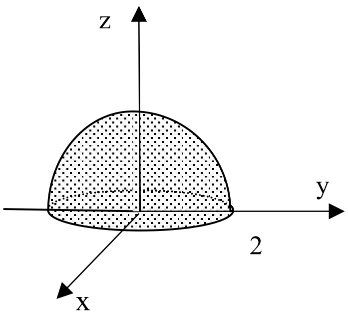

Рис.15

Розв'язання. В даному прикладі $P(x,y,z) = x^3$, $Q(x,y,z) = y^3$, $R(x,y,z) = z^3$.

Тоді $\dfrac{\partial P}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2$, $\dfrac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$ і за (23): $I = \iiint\limits_V \left(3x^2 + 3y^2 + 3z^2\right) dxdydz$. Обчислюємо інтеграл в сферичних координатах:

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta d\theta \int_0^2 \rho^2 \cdot \rho^2 d\rho = 3 \cdot \frac{32}{5} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(-\cos\theta\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{96}{5}\varphi\Big|_0^{2\pi} = \frac{192\pi}{5}.$$

В деяких випадках є доцільним використовувати формулу Остроградського - Гауса і для обчислення інтегралів по незамкнених поверхнях. У цьому випадку в границю області інтегрування додаються поверхні так, щоб поверхня інтегрування стала замкненою. Інтеграл по отриманій замкненій поверхні обчислюється за теоремою Остроградського - Гауса, і від отриманого результату віднімаються значення поверхневих інтегралів по поверхнях, які додавалися.

Приклад. Знайти поверхневий інтеграл II роду: $I = \iint\limits_{\sigma^+} \left(x^3 + xy^2\right) dydz + \left(y^3 + x^2 y\right) dxdz + z^3 dxdy$, де σ^+- бокова поверхня циліндра $x^2 + y^2 = 1$, що обмежена площинами $z = 0$, $z = 1$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

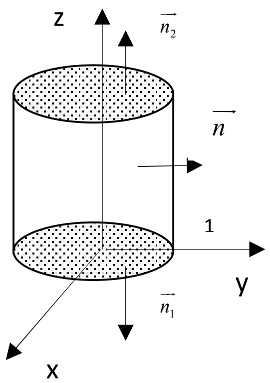

Рис.16

Розв'язання. Область інтегрування зображена на Рис.16. Дозамикаємо поверхню двома площинами: $\sigma_1 : z = 0$ з вектором нормалі $\vec{n_1} = \{0;0;-1\}$ і площиною $\sigma_2 : \text{z} = 1$ з вектором нормалі $\vec{n_2} = \{0;0;1\}$ і розглядаємо замкнену поверхню $\sigma_{зам}$. Тоді $I = I_з - I_1 - I_2$, де $I_з$- інтеграл по побудованій замкненій поверхні $\sigma_{зам}$; I_1- інтеграл по площині σ_1, I_2- по площині σ_2.

$I_з$ знаходимо за теоремою Остроградського-Гауса: $P = x^3 + xy^2$; $\text{Q} = \text{y}^3 + x^2 y$; $\text{R} = z^3$, $\frac{\partial P}{\partial x} = 3x^2 + y^2$; $\frac{\partial Q}{\partial y} = 3y^2 + x^2$; $\frac{\partial R}{\partial z} = 3z^2$. За формулою (23): $I_3 = \iiint\limits_V \left(3x^2 + y^2 + 3y^2 + x^2 + 3z^2\right) dxdydz$. Проєкцією області інтегрування на площину Oxy буде круг $D : x^2 + y^2 \le 1$, тому переходимо в потрійному інтегралі в циліндричну систему координат

$$I_з = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_0^1 \left(4\rho^2 + z^2\right) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho\left(4\rho^2 z + z^3\right)\Big|_0^1 d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(4\rho^3 + \rho\right) d\rho =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\rho^4 \Big|_0^1 + \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^1 \right) = \frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi} = 3\pi .$$

Тепер обчислюємо I_1 за формулою (22):

$I_1 = \iint\limits_{\sigma_1} \left(\left(x^3 + xy^2 \right) 0 + \left(y^3 + x^2 y \right) 0 + z^3 \left(-1 \right) \right) d\sigma = 0,$ оскільки рівняння $\sigma_1 : z = 0.$

Аналогічно обчислюємо I_2:

$$I_2 = \iint\limits_{\sigma_2} \left(\left(x^3 + xy^2 \right) 0 + \left(y^3 + x^2 y \right) + z^3 \cdot 1 \right) d\sigma = \iint\limits_{\sigma_2} z^3 d\sigma = \iint\limits_{D} 1^3 dxdy = S_D = \pi.$$

Остаточно: $I = 3\pi - 0 - \pi = 2\pi.$

5. Варіанти типового розрахунку.

Варіант № 1.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L 3xydl$, де $L: y=\sqrt{4-x^2}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x^2-y)dx+zdy+yzdz$, де L – відрізок прямої, від точки (3,-1,0) до точки (2,4,5).

3. Знайти масу частини поверхні $x^2+y^2+z^2=9,(z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\mu=x^2y^2z$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} 4xdydz-2ydxdz-zdxdy$ по замкнутій поверхні $\sigma^+: x+y+z=6;\ 3x+2y=12;\ 3x+y=6;\ y=0;\ z=0$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 2.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{dl}{x+y^2}$, де L – відрізок прямої від точки (0;1) до точки (3;6).

2. Поновити $u=u(x,y)$, де $du=\frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx+\left(\frac{e^y}{1+x^2}+1\right)dy$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma \frac{d\sigma}{(1+x+2z)^2}$, де $\sigma: x+y+z=1;$ $(x>0;y>0;z>0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл по замкнутій поверхні $\iint_{\sigma^+} 2xdydz+zdxdy$, де $\sigma^+: z=x^2+y^2+1; x^2+y^2=4; z=0\ \ 3x+y=6; y=0; z=0$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 3.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \sqrt{x^2+y^2+z^2}dl$, де $L: x=t\cos t; y=t\sin t; z=t, 0\le t\le 2\pi$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} \left(x^2 - y\right)dx - y^2xdy$ де $L: y = \sqrt{x}; x = \sqrt{y}$ за формулою Гріна (обхід контуру проти годинникової стрілки).

3. Знайти масу поверхні $\sigma: 3x + y + 6z - 6 = 0;\ \left(x > 0; y > 0; z > 0\right);\ \mu\left(x; y; z\right) = 6z - x$ - густина.

4. Обчислити поверхневий інтеграл по замкнутій поверхні $\iint\limits_{\sigma^+} \left(x + y\right)dydz + \left(x - y\right)dxdz + \left(z^2 - 2\right)dxdy$, де $\sigma^+: z = \sqrt{x^2 + y^2}; z = 2$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 4.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} y\sin xdl$, де OAB -ламана $O\left(0;0\right); A\left(1;1\right); B\left(2;0\right)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} xydx + y^2dy$,де $L: x^2/4 + x^2/9 = 1$ від $A\left(0;-3\right)$ до $B\left(3;0\right)$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} yd\sigma$, де $\sigma: z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл по замкнутій поверхні $\iint\limits_{\sigma^+} \left(y + z\right)dydz + \left(x - 2y + z\right)dxdz + xdxdy$, де $\sigma^+: z = x^2 + y^2; x^2 + y^2 = 1; z = 0$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 5.

1. Знайти масу дуги кривої $y = \ln x$ від $\left(1;0\right)$ до $\left(2;\ln 2\right)$, густина $\mu\left(x, y\right) = x^2$.

2. Знайти роботу сили $\vec{F} = \left(xy - y^2\right)\vec{i} + x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: y = 2x^2$ від $M\left(0;0\right)$ до $N\left(1;2\right)$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \left(1 + z\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x + 4y + z = 4;\ \left(x > 0; y > 0; z > 0\right)$.

4. Обчислити $\iint\limits_{\sigma^+} 4xzdydz$ де σ^+ - поверхня $z=1-x^2-y^2;(z\geq 0)$, вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з Oz.

Варіант № 6.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x+2y}}$,де AB- відрізок прямої від $A(1;1)$ до $B(3;5)$.

2. Поновити $u=u(x,y)$, де $du=(3x^2y+\cos y)dx+(x^3-x\sin y)dy$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xd\sigma$, де $\sigma: z=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 4xzdydz+z^2dxdz+y^2dxdy$ по частині площині $\sigma^+: 2x+2y+z=2;(x\geq 0; y\geq 0; z\geq 0)$ (вектор нормалі утворює гострий кут з додатним напрямом Oz).

Варіант № 7.

1. Знайти масу дуги кривої від $2x=y^2$ від $(0;0)$ до $(2;2)$, густина $\mu(x,y)=y$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} (y^2+xz)dx+y^2zdy+x^3ydz$ по замкненій кривій $L: \begin{cases} 2-z=x^2+y^2, \\ z=-2. \end{cases}$(обхід контуру проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} yd\sigma$, де $\sigma: x^2+y^2+z^2=9;\ (x>0; y>0; z>0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xzdxdy$, де σ^+ - поверхня $z=1+x^2+y^2;(z\leq 3)$, вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з Oz.

Варіант № 8.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \left(2y+xz^2\right)dl,$ по замкненій кривій $L:\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ z=4. \end{cases}$

2. Знайти роботу сили $\vec{F}=x^2y\vec{i}-xy^2\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2+y^2=4\left(x>0; y>0\right);$ від $M\left(2;0\right)$ до $N\left(0;2\right)$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} z^2 d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: z=\sqrt{x^2+y^2};(z\le 4)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} x^3dydz+y^3dxdz+z^3dxdy$ по замкнутій поверхні $\sigma^+: x^2+y^2+z^2=1 \;\; x=0; y=0; z=0$ (I октант, нормаль зовнішня).

Варіант № 9.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L \frac{dl}{x^2+y^2+z^2}$, де $L: x=a\cos t; y=a\sin t; z=bt, 0\le t\le 2\pi$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydx-\left(y-x^2\right)dy$, де $L: y=2x-x^2$ від точки (0,0) до точки (1,1).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} d\sigma$ по поверхні $\sigma: z=x^2+y^2;(z\le 4)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 3xdydz+4zdxdy$ по частині площини $\sigma^+: 2x+4y+4z=4$, що розташована в I октанті (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з Oz).

Варіант № 10.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OA} \frac{dl}{\sqrt{x^2+y^2+9}}$, де OA – відрізок прямої від $O\left(0;0\right)$ до $A\left(1;2\right)$.

2. Обчислити за формулою Гріна криволінійний інтеграл $\int\limits_L y^2dx + 2xydy$, де $L: y^2 + x^2 = 2y$ (обхід контуру проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} (x+z)\,d\sigma$ по частині площини $\sigma: 2x+y+z=2$; що розташована в I октанті.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xydydz$ по замкненій поверхні $\sigma^+: z=\sqrt{x^2+y^2}; z=2$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 11.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L ydl,$де L - дуга кривої $y^2 = 6x$, що відтинається кривою $x^2 = 6y$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (xy+z)dx + \sqrt{x^2+y^2}zdz$ по замкненій кривій $L: \begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2}, \\ z = 2. \end{cases}$ (обхід контуру проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xzd\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: x^2+y^2=z^2; (0 \le z \le 1)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} (y+z)\,dydz + ydxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2 + y^2 = 4$, що обмежена площинами $z=0$, $z=1$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

Варіант № 12.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}\right)dl,$ де AB –відрізок прямої від $A(-1;0)$ до $B(0;1)$.

2. Поновити $u = u(x, y)$, де $du = \left(y^2e^x - \sin(2x+4y)\right)dx + \left(2ye^x - 2\sin(2x+4y)\right)dy.$

3. Обчислити поверхневий інтеграл: $\iint_{\sigma}(6x+4y+3z)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x+2y+3z=6;\ (x>0; y>0; z>0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} xyzdxdy$ по замкненій поверхні $\sigma^+ : x^2+y^2=2x; z=0; z=2.$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 13.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L xydl,$ де $L: x=\sqrt{a^2-y^2}$.

2. Знайти роботу сили $\vec{F}=(x^2-y^2)\vec{i}+(x^2+y^2)\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2/9+y^2/4=1; (y\geq 0)$ від $M(3;0)$ до $N(-3;0)$.

3. Знайти масу поверхні $\sigma: x^2+y^2+z^2=16;\ (x>0; y>0; z>0)$. з густиною $\mu(x;y;z)=y$.

4, Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} 4xdydz+3ydxdz-xydxdy$, по замкненій поверхні $\sigma^+ : x^2+y^2=4y; z=0; z=3.$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 14.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \sqrt{y}\,dl,$ де $L: \begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t). \end{cases} (0\leq t\leq 2\pi).$

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L (x/(y+z))dx-((y+z)/x)dz$, де L – відрізок прямої, від точки A(1;0;2) до точки B(3;4;1).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma}\sqrt{x^2+y^2}d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: z^2=x^2+y^2; (0\leq z\leq 25)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} x^2dydz-ydxdz-2xzdxdy$ по замкненій поверхні $\sigma^+ : z=\sqrt{25-x^2-y^2}; z=0$ (нормаль зовнішня).

Варіант № 15.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} x\sin y\,dl$, де OAB -ламана $O(0;0);A(2;0);B(2;3)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L}(x-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$, де $L: x=a\sin t; y=a\cos t; z=bt, 0\le t\le \pi$ (обхід контуру проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xyzd\sigma$ по частині площини $\sigma: x+2y+z=2;\ (x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}(x+3y)dxdy$ по боковій поверхні конуса $\sigma^+: z=\sqrt{x^2+y^2}; (z\le 2)$ (вектор нормалі до поверхні утворює тупий кут з Oz).

Варіант № 16.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} e^x dl,$ де $L: y=e^x; (0\le x\le 1)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{ABC}(x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, де ABC-ламана, $A(0;1);B(1;1);C(2;0)$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)d\sigma$, де $\sigma: x^2+y^2+z^2=1;\ (x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}(x+xy^2)dydz+(y-x^2y)dxdz+zdxdy$, по поверхні $\sigma^+: x^2+y^2+z^2=9; (z\ge 0)$ (вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з Oz).

Варіант №17.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xydl,$ де $L: x^2+y^2=4$ від $M(2;0)$ до $N(0;2)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+y)dx+y^2xdy$, де $L: x^2+y^2=2y$ за формулою Гріна (обхід контуру проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_\sigma (x+yz)d\sigma$ по частині площини $\sigma: x+2y+2z=2; (x\ge 0; y\ge 0; z\ge 0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xdydz+ydxdz+\sin zdxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2+y^2=1$, що обмежена площинами $z=0$, $z=5$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

Варіант №18.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L x^2dl,$де $L: y=\ln x; (1\le x\le e)$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{OAB} (x+3y)dx-4ydy$,де OAB- ламана, $O(0;0); A(1;1); B(2;3)$.

3. Знайти масу поверхні $\sigma: x^2+y^2=z^2;\ (0\le z\le 1); \mu(x;y;z)=x^2+y^2$ - густина.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}\left(y+\sqrt{z}\right)dydz+3xdxdz+(3z+5x)dxdy$ по замкнутій поверхні $\sigma^+: z=\sqrt{8x^2+8y^2}; z=2$ (нормаль зовнішня).

Варіант №19.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L xyzdl,$ де $L: \begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ z=2. \end{cases}$.

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L xdx + \left(y^2 + x^2\right)dy$, де L- контур трикутника ABC $A(0;0); B(1;1); C(2;0)$ (рух по кривій проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma \left(z + 2x + (4/3)\,y\right)d\sigma$ по частині площини $\sigma: 6x + 4y + 3z = 12; \left(x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0\right)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} (\pi/2)\,xdydz + 4\pi ydxdz + 2(z+1)\,dxdy$ по замкнутій поверхні $\sigma^+ : 12x + 4y + 3z = 12; \mathrm{x} = 0, \mathrm{y} = 0, z = 0$ (нормаль зовнішня).

Варіант №20.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \left(x^2 - y^2\right)dl,$де $L: y = x^2$ від $M(1;1)$ до $N(2;4)$.

2. Поновити $u = u(x, y)$, де $du = 2xe^y dx + \left(2y + x^2 + y^2\right)e^y dy.$

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma yzd\sigma$, де $\sigma: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_{\sigma^+} (x - y)\,dydz + (x + y)\,dxdz + z^2 dxdy$, по боковій поверхні циліндра $\sigma^+ : x^2 + y^2 = 1$, що обмежена площинами $z = 0$, $z = 2$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

Варіант №21.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int_L \frac{ydl}{\sqrt{x}},$де $L: y^2 = \frac{4}{9}x^3$ від $M\left(3; 2\sqrt{3}\right)$ до $N\left(8; 32\sqrt{2}/3\right)$.

2. Знайти роботу сили $\vec{F} = y\vec{i} - x\vec{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L: x^2 + y^2 = 4;$ $(y \ge 0)$ від $M(2;0)$ до $N(-2;0)$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint_\sigma (x + 2z)\,d\sigma$ по частині площини $\sigma: x + 2y + 2z = 4; \left(x \ge 0; y \ge 0; z \ge 0\right)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+}(x+z)\,dxdz$ по боковій поверхні конуса $\sigma^+ : z=\sqrt{x^2+y^2};(0\le z\le 1)$, вектор нормалі до поверхні утворює гострий кут з Oz.

Варіант №22.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L (x+y)\,dl,$ де L - контур трикутника ABC $A(1;0);B(0;1);C(0;0)$.

2. Довести, що інтеграл не залежить від кривої інтегрування, та знайти його:
$\int\limits_{(1;0)}^{(2;3)} 2xe^{2y}dx+\left(3y^2+2x^2e^{2y}\right)dy$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}\sqrt{z}\,d\sigma$ де $\sigma: z^2=4\left(x^2+y^2\right);(0\le z\le 1)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xydydz+zydxdy$ по замкненій поверхні $\sigma^+ : x+2y+2z=4; x=0, y=0, z=0.$ (нормаль зовнішня).

Варіант №23.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_L\left(2z-\sqrt{x^2+y^2}\right)dl,$ де $L: x=t\sin t; y=t\cos t; z=t, 0\le t\le 2\pi$.

2. Знайти роботу сили $\vec{F}=\left(x^2+2y\right)\vec{i}+\left(2x+y^2\right)\vec{j}$ при переміщенні вздовж прямої від точки $M(-4;0)$ до точки $N(0;2)$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma}(z+2y)\,d\sigma$ по частині площини $\sigma: 2x-2y-z=2;$ що розташована в І октанті.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} 3xzdydz+z^2dxdy$ по замкнутій поверхні $\sigma^+ : x=1; y=1; z=0; z=x^2+y^2+1, x=0; y=0$, (нормаль зовнішня).

Варіант №24.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} xydl,$ де $L: x^2/4 + y^2/16 = 1;\ (x \geq 0; y \geq 0).$

2. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{L} \left(xy^2 + x\right)dx + 3xydy$, де L- контур трикутника ABC, $A(1;1); B(3;0); C(3;2)$ (обхід проти годинникової стрілки).

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} \left(x^2 + y^2\right)d\sigma$ по боковій поверхні конуса $\sigma: x^2 + y^2 = z^2; (0 \leq z \leq 2)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} (y+z)dydz + ydxdy$ по боковій поверхні циліндра $\sigma^+: x^2 + y^2 = 9$, що обмежена площинами $z=0$, $z=1$ (нормаль зовнішня до замкнутої поверхні, що утворена даними поверхнями).

Варіант №25.

1. Обчислити криволінійний інтеграл $\int\limits_{AB} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2}},$ де AB –відрізок прямої від $A(0;-2)$ до $B(4;0)$.

2. Довести, що інтеграл не залежить від кривої інтегрування, та знайти його $\int\limits_{(0;0)}^{(\pi;1)} \left(2\cos(2x+y) + e^{3y}\right)dx + \left(\cos(2x+y) + 3xe^{3y}\right)dy$.

3. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma} xzd\sigma$ де $\sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9;$ $(x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0)$.

4. Обчислити поверхневий інтеграл $\iint\limits_{\sigma^+} xzdydz + 3z^2dxdy$ по замкненій поверхні $\sigma^+: x^2 + y^2 = 2x; x^2 + y^2 = 4x; z = 0; z = 2$ (нормаль зовнішня).

Література

[1] Бугров Я.С., Никольский С.М. *Дифференциальное и интегральное исчисление* - М.: Наука. - 1988. - 432 с.

[2] Пискунов Н.С. *Дифференциальное и интегральное исчисление*. Т.2.- М.: Наука - 1970. - 576 с.

[3] Письменный Д.Т. *Конспект лекций по высшей математике. Полный курс* (9-е изд.) - М:Высшее образование. - 2009.-606 с.

[4] Кузнецов Л.А. *Сборник заданий по вістей математике* (6 изд.) – С.-П.:Лань – 2007. – 238 с.

[5] Владіміров В.М., Пучков О.А., Шмигевський М.В. *Збірник завдань з вищої математики.* Ч.2. - Київ: Політехніка. - 2002.-108 с.

[6] Дубовик В.П., Юрик І.І. *Вища математика: навчальний посібник*. - Київ: А.С.К.-2005. - ISBN 966-539-320-0. - 648с.